

## Contrôle Intermédiaire : Correction.

---

### Partie I (à rédiger sur une première copie)

#### Exercice 1 [4 points]

1. Définissez la convergence normale d'une **série** de fonctions  $f_n$  définie sur un domaine  $D$ .
2. Est-ce que la **série** donnée par le terme général :

$$f_n(x) = \cos(nx)/nx^2, \quad n \geq 1, \quad x \in ]0, +\infty[,$$

converge simplement ?

3. Cette même série converge-t-elle normalement ?

**Correction Exercice 1** 1. La série numérique des normes  $\|f\|_\infty$  converge.

2. La série ne converge pas simplement : il suffit de regarder  $x = 2\pi$  et à une constante près on tombe sur la série harmonique divergente  $\sum 1/n$ .
3. Du coup la série ne converge pas non plus normalement.

**Exercice 2** [5 points] Pour les **suites** de fonctions données par le terme général suivant pour  $n \geq 1$ , dites si elles convergent simplement ? uniformément ?

1.  $a_n(x) = x^{2n}$ ,  $x \in ]0, 1[$ .
2.  $b_n(x) = \sin(nx^2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
3.  $c_n(x) = \frac{\ln(nx)}{1+\ln(nx)}$ ,  $x \in [1, 2]$ .

**Correction Exercice 2** 1. On a bien convergence simple vers 0 (suite géométrique de raison  $-1 < x^2 < 1$ ). Il n'y a pas de convergence uniforme vers 0 : il suffit de considérer la suite  $x_n = 1 - 1/2n$ . On a :

$$a_n(x_n) = (1 - 1/2n)^{2n} = e^{2n \ln(1-1/2n)} = e^{-1+o(1)}$$

donc  $a_n(x_n)$  ne converge pas vers 0.

2. On n'a pas convergence simple (donc non plus convergence uniforme) : il suffit de regarder en  $x = \sqrt{\pi/2}$  où l'on obtient une suite qui oscille entre 0, 1 et  $-1$ .
3. On a convergence simple vers 1 (il suffit de remarquer que le dénominateur est équivalent au numérateur pour chaque valeur de  $x$ ). En fait cette convergence est uniforme car pour tout  $x$  dans  $[1, 2]$  on a :

$$|c_n(x) - 1| = \frac{1}{1 + \ln(nx)} \leq \frac{1}{1 + \ln(n)},$$

et cette dernière quantité ne dépend pas de  $x$  et tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## Partie II (à rédiger sur une deuxième copie)

**Exercice 3** [3 points] Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + 1/x)$ .

**Correction Exercice 3** 1. Cela tend vers 0 car on domine en valeur absolue par  $1/x$ .  
2. On pose  $y = 1/x$  et on procède par équivalents avec un DL d'ordre 1 : on obtient un équivalent à  $y/y$  donc la limite demandée vaut 1.

**Exercice 4** [4 points] Dire si les **séries numériques** données par le terme général suivant ( $n \geq 0$ ) convergent :

1.  $u_n = \frac{\sin(n)}{(n+1)^2}$ .
2.  $v_n = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^3}$ .
3.  $w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ .

**Correction Exercice 4** 1. On a bien convergence par comparaison avec la série de Riemann de terme général  $1/n^2$ .  
2. On a bien convergence par comparaison avec la série de Riemann de terme général  $1/n^2$ .  
3. On a bien convergence car on est dans le cadre du critère des séries alternées : les signes alternent et  $|w_n|$  décroît vers 0.

**Exercice 5** [4 points] Dire si les **suites numériques** données par le terme général suivant ( $n \geq 1$ ) convergent. Si oui, donner la limite.

1.  $a_n = \frac{\ln(e^n+1)}{n}$ .
2.  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n \ln(n)}$ .

**Correction Exercice 5** 1. Le numérateur vaut :

$$\ln e^n + \ln(1 + e^{-n}) = n + e^{-n} + o(e^{-n})$$

Il est donc équivalent au dénominateur, et par conséquent  $a_n$  tend vers 1.

2. On passe à l'exponentielle :

$$b_n = e^{n \ln(n) \ln(1+1/n^2)}$$

On développe l'exposant et on obtient :

$$n \ln(n) (1/n^2 + o(1/n^2)) = \ln n/n + o(\ln n/n),$$

donc l'exposant tend vers 0. L'exponentielle étant continue,  $b_n$  tend vers  $e^0 = 1$ .